**Les amies espiègles**

Estelle et Chloé sont fans d'énigmes mathématiques.

a) Un jour, Estelle envoie à Chloé le message suivant : « Voici cinq nombres : 346, 905, 376, 845 et 305. Mon numéro fétiche est un nombre à trois chiffres et chacun des cinq nombres donnés comporte un et seul chiffre qui est positionné à la bonne place de mon numéro fétiche. »

   Quel est le numéro fétiche d'Estelle ?

b) Quelques jours plus tard, Chloé envoie un mot à Estelle : « J'espère que tu pourras venir à mon anniversaire. Voici huit nombres : 4358, 1026, 7944, 3817, 4659, 2751, 8903 et 5227. Le code d'entrée de mon immeuble a été changé, c'est un nombre à quatre chiffres et chacun des huit nombres donnés comporte un et un seul chiffre qui est positionné à la bonne place du code d'entrée de mon immeuble. »

   Quel est le code d'entrée de l'immeuble de Chloé ?

**Solutions**

a) Le 1er chiffre du numéro d'Estelle est 3 ou 9 ou 8. Le 2e chiffre du numéro d'Estelle est 4 ou 0 ou 7. Le 3e chiffre du numéro d'Estelle est 6 ou 5.

   Etablissons la liste des numéros possibles d'Estelle :

   346, 345, 306, 305, 376, 375, 846, 845, 806, 805, 876, 875, 946, 945, 906, 905, 975 et 976.

   Parmi ces 18 numéros, seul le **806** convient.

   Par exemple, le numéro 975 de la liste des numéros possibles ne peut pas convenir car le numéro 905 de la liste donné par Estelle aurait deux nombres (9 et 5) positionnés à la bonne place.

b) La stratégie utilisée en a) serait longue et pénible. Alors, voyons-en une autre.

   Plaçons les huit nombres dans le tableau de gauche ci-dessous. Dans le tableau du milieu, notons le nombre de fois que l'on trouve les différents chiffres des colonnes *a**, *b**, *c** et *d**. Par exemple, le chiffre 4 se trouve 2 fois dans la colonne *a**, 0 fois dans la colonne *b**, 1 fois dans la colonne *c** et 1 fois dans la colonne *d** ; cela nous permet de compléter la ligne des 4 du tableau du milieu.

   Comme un et un seul chiffre est positionné à la bonne place, le nombre total des chiffres placés au bon endroit doit être égal à 8. Dans le tableau de droite, un nombre de la colonne *a*, plus un nombre de la colonne *b*, plus un nombre de la colonne *c*, plus un nombre de la colonne *d* doit valoir 8. Quatre cas doivent être étudiés.

| | *a** | *b** | *c** | *d** |
|---|---|---|---|---|
| 1er nombre | 4 | 3 | 5 | 8 |
| 2e nombre | 1 | 0 | 2 | 6 |
| 3e nombre | 7 | 9 | 4 | 4 |
| 4e nombre | 3 | 8 | 1 | 7 |
| 5e nombre | 4 | 6 | 5 | 9 |
| 6e nombre | 2 | 7 | 5 | 1 |
| 7e nombre | 8 | 9 | 0 | 3 |
| 8e nombre | 5 | 2 | 2 | 7 |

| | *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 2 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 3 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 0 | 2 |
| 8 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 9 | 0 | 2 | 0 | 1 |

| | *a* | *b* | *c* | *d* | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1er cas | 1 | 2 | 3 | 2 | 8 |
| 2e cas | 2 | 1 | 3 | 2 | 8 |
| 3e cas | 2 | 2 | 2 | 2 | 8 |
| 4e cas | 2 | 2 | 3 | 1 | 8 |

   Soit n, le numéro de code. Dans le 1er cas, le 2e chiffre de n apparaît deux fois, c'est le 9. Le 3e chiffre de n apparaît trois fois, c'est le 5. Le 4e chiffre de n apparaît deux fois, c'est le 7. Le nombre cherché est x957. On voit que x957 correspond à la règle imposée dans la donnée pour tous les nombres donnés sauf pour le 2e (1026). Alors, le 1er chiffre de n est 1 et tout fonctionne. Le numéro de code est **1957**.

Il vaut vérifier l’unicité de ce code.

Dans le 2e cas, les deux derniers chiffres de n sont les mêmes que dans le 1er cas. Le 1er chiffre de n apparaît deux fois, c’est le 4. Alors, n = 4y57. Ce numéro de code n’est pas possible car, par exemple, le 1er nombre (4358) contient deux chiffres bien placés (4 et 5).

Dans le 3e cas, tous les chiffres apparaissent deux fois, alors n = 4927. Ce numéro de code n’est pas possible car, par exemple, le 8e nombre (5227) contient deux chiffres bien placés (2 et 7).

Dans le 4e cas, en faisant le même type de raisonnement, on obtient n = 495z. Ce numéro de code n’est pas possible car, par exemple, le 1er nombre (4358) contient deux chiffres bien placés (4 et 5).

On est sûr maintenant que le seul code possible est 1957.